Aksaray University
Journal of Science and Engineering

e-ISSN: 2587-1277

http://asujse.aksaray.edu.tr

Aksaray J. Sci. Eng.
Volume **5,** Issue **2,** pp. **125-137.**
doi: 10.29002/asujse.1020770
Available online at DergiPark

Research Article

On The Gaussian Narayana-Lucas Numbers

Nusret Karaaslan[1,*], Merve Nur Fazlioglu[2]

[1]Kalkandere Dağdibi Secondary School, Rize, 53500, Turkey
[2]Kalkandere Anatolian Imam Hatip High School, Rize, 53500, Turkey

▪*Received Date:* Nov 08, 2021 ▪*Revised Date:* Dec 09, 2021 ▪*Accepted Date:* Dec 09, 2021 ▪*Published Online:* Dec 13, 2021

Abstract

In this study, the Gauss Narayana-Lucas number sequence is introduced and examined. Firstly, the Gaussian Narayana-Lucas number sequence is defined by extending the Narayana-Lucas number sequence. Then, the generating function and the Binet formula of this number sequence were obtained. In addition, some sum formulas related to the Gaussian Narayana-Lucas number sequence and some matrices containing the terms of this sequence are examined. Finally, some relations were obtained between Gaussian Narayana and Gaussian Narayana-Lucas number sequences.

Keywords

Narayana number sequence, Narayana-Lucas number sequence, Gaussian Narayana-Lucas number sequence, generating function, Binet formula.

[*]**Corresponding Author:** Nusret Karaaslan, nusret5301@gmail.com, 0000-0002-0244-1286

Aksaray University
Journal of Science and Engineering
e-ISSN: 2587-1277
http://asujse.aksaray.edu.tr

Aksaray J. Sci. Eng.
Volume **5,** Issue **2,** pp. **125-137.**
doi: 10.29002/asujse.1020770
Available online at DergiPark AKADEMİK

Research Article

Gauss Narayana-Lucas Sayıları Üzerine

Nusret Karaaslan[1,*], Merve Nur Fazlıoğlu[2]

[1]Kalkandere Dağdibi Ortaokulu, Rize, 53500, Türkiye
[2]Kalkandere Anadolu İmam Hatip Lisesi, Rize, 53500, Türkiye

▪*Gönderi Tarihi:* 08 Kas 2021 ▪*Düzeltme Tarihi:* 09 Ara 2021 ▪*Kabul Tarihi:* 09 Ara 2021 ▪*Çevrimiçi Yayın Tarih:* 13 Ara 2021

Özet

Bu çalışmada, Gauss Narayana-Lucas sayı dizisi tanıtıldı ve incelendi. İlk olarak Narayana-Lucas sayı dizisi genişletilerek Gauss Narayana-Lucas sayı dizisi tanımlanmıştır. Daha sonra bu sayı dizisine ait üreteç fonksiyonu ve Binet formülü elde edilmiştir. Ayrıca Gauss Narayana-Lucas sayı dizisi ile ilgili bazı toplam formülleri ve bu dizinin terimlerini içeren bazı matrisler araştırılmıştır. Son olarak Gauss Narayana ile Gauss Narayana-Lucas sayı dizileri arasında bazı ilişkiler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler
Narayana sayı dizisi, Narayana-Lucas sayı dizisi, Gauss Narayana-Lucas sayı dizisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü.

[*]**Sorumlu Yazar:** Nusret Karaaslan, nusret5301@gmail.com, 0000-0002-0244-1286

1. GİRİŞ

Fibonacci sayı dizisi ve bu sayı dizisinin türevleri yalnızca matematikte olmamakla birlikte kendilerine pek çok dalda uygulamalar bulmuştur. Literatür incelendiğinde sayı dizileri ve kombinatoriyal özellikleri üzerinde yapılmış birçok çalışma yer almaktadır [1-5]. Fibonacci sayı dizisinin rekürans bağıntısı aşağıda ifade edilmiştir:

Tanım 1.1. Fibonacci sayı dizisi, başlangıç koşulları $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ikinci mertebeden rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada F_n, n. Fibonacci sayısıdır [1].

Ayrıca literatürde rekürans bağıntıya sahip bazı sayı dizilerinin Gauss formları da mevcuttur. Burada da bu sayı dizilerini oluşturan terimler karmaşık sayıdır. Yine literatürde sayı dizilerinin Gauss formlarını içeren pek çok çalışma yer almaktadır [6-11]. Bunlardan Gauss Fibonacci sayı dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Tanım 1.2. Gauss Fibonacci sayı dizisi, başlangıç koşulları $GF_0 = i$ ve $GF_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 2$ için,

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$$

ikinci mertebeden rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada GF_n, n. Gauss Fibonacci sayısıdır [8].

Herhangi bir terimi kendinden önce gelen üç terim cinsinden yazılabilen sayı dizileri üçüncü mertebeden rekürans bir bağıntıya sahiptir. Kaynak taraması yapıldığında bu sayı dizileri de birçok yazar tarafından araştırılmıştır [12-14]. Bunlardan bu çalışmada kullanılacak olan Narayana ve Narayana-Lucas sayı dizilerine ait üçüncü mertebeden rekürans bağıntıları aşağıda sırasıyla verilmiştir:

Tanım 1.3. Narayana sayı dizisi, başlangıç koşulları $N_0 = 0$, $N_1 = 1$ ve $N_2 = 1$ olmak üzere, $n \geq 3$ için,

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada N_n, n. Narayana sayısıdır [15].

Tanım 1.4. Narayana-Lucas sayı dizisi, başlangıç koşulları $U_0 = 3$, $U_1 = 1$ ve $U_2 = 1$ olmak üzere, $n \geq 3$ için,

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada U_n, n. Narayana-Lucas sayısıdır [15].

Bunun yanı sıra üçüncü mertebeden rekürans bağıntıya sahip bazı sayı dizilerinin Gauss formları da tanımlanmıştır [16-18]. Bunlardan Gauss Narayana sayı dizisine ait rekürans bağıntısı aşağıda verilmiştir:

Tanım 1.5. Gauss Narayana sayı dizisi, başlangıç koşulları $GN_0 = i$, $GN_1 = 1$ ve $GN_2 = 1$ olmak üzere, $n \geq 3$ için,

$$GN_n = GN_{n-1} + GN_{n-3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada GN_n, n. Gauss Narayana sayısıdır [18].

Bu çalışmanın temelini ise Narayana-Lucas sayı dizisinin Gauss formu oluşturmaktadır. Literatür incelendiğinde Narayana-Lucas sayı dizisinin Gauss formu olan Gauss Narayana-Lucas sayı dizisine rastlanılmadığından ve bu eksikliği gidermek amacıyla ilk olarak bu sayı dizisinin rekürans bağıntısı tanımlanmıştır. Sonra bu sayı dizisinin negatif indisli terimlerini veren bağıntı bulunmuştur. Ardından Gauss Narayana-Lucas sayı dizisine ait üreteç fonksiyonu ve Binet formülü elde edilmiştir. Daha sonra bu sayı dizisini içeren bazı toplam formüllerine ulaşılıp bu sayı dizisinin terimleri ile oluşturulan matrisler incelenmiştir. Son olarak Gauss Narayana ve Gauss Narayana-Lucas sayı dizilerini birlikte içeren özdeşlikler elde edilmiştir.

2. GAUSS NARAYANA-LUCAS SAYILARI

İlk olarak Gauss Narayana-Lucas sayı dizisine ait rekürans bağıntısını veriyoruz.

Tanım 2.1. Gauss Narayana-Lucas sayı dizisi $\{GU_n\}_{n=0}^{\infty}$, başlangıç koşulları $GU_0 = 3 - 2i$, $GU_1 = 1$ ve $GU_2 = 1 + 3i$ olmak üzere, $n \geq 3$ için,

$$GU_n = GU_{n-1} + GU_{n-3} \tag{1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır.

Ayrıca n. Narayana-Lucas sayısı U_n olmak üzere,

$$GU_n = U_n + iU_{n-2} \tag{2}$$

olduğu açıktır.

Şimdi ise, Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin negatif indisli terimlerini veren rekürans bağıntısı tanımlanacaktır.

Teorem 2.1. $n \geq 1$ *olmak üzere, Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin negatif indisli terimleri*

$$GU_{-n} = -GU_{-(n-2)} + GU_{-(n-3)} \tag{3}$$

bağıntısı ile bulunur.

İspat: Gauss Narayana-Lucas sayı dizisine ait rekürans bağıntısı olan (1) numaralı eşitlik düzenlenirse,

$$GU_{n-3} = -GU_{n-1} + GU_n \tag{4}$$

bulunur. Daha sonra (4) numaralı eşitlikte n yerine $-n+3$ yazılırsa,

$$GU_{-n} = -GU_{-n+2} + GU_{-n+3}$$

$$GU_{-n} = -GU_{-(n-2)} + GU_{-(n-3)}$$

elde edilip ispat tamamlanmış olur.

Örneğin; (3) te $n = 1$ yazılırsa; $GU_{-1} = -GU_1 + GU_2 = -1 + (1 + 3i) = 3i$ bulunur.

Şimdi de Gauss Narayana-Lucas sayı dizisine ait üreteç fonksiyonu ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.2. *Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu*

$$f(x) = \frac{(3-2i) - 2(1-i)x + 3ix^2}{1 - x - x^3}$$

şeklindedir.

İspat: Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} GU_n x^n$$

olsun. O halde, üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} GU_n x^n = GU_0 + GU_1 x + GU_2 x^2 + GU_3 x^3 + \cdots + GU_n x^n + \cdots \tag{5}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi, (5) eşitliğini sırasıyla x ve x^3 ile çarpalım. Buradan

$$xf(x) = GU_0 x + GU_1 x^2 + GU_2 x^3 + GU_3 x^4 + \cdots + GU_{n-1} x^n + \cdots \tag{6}$$

$$x^3 f(x) = GU_0 x^3 + GU_1 x^4 + GU_2 x^5 + GU_3 x^6 + \cdots + GU_{n-3} x^n + \cdots \tag{7}$$

elde edilir. (6) ve (7) eşitliklerini taraf tarafa toplayıp, elde edilen sonucu (5) ten çıkarırsak

$$f(x)(1 - x - x^3) = GU_0 + (GU_1 - GU_0)x + (GU_2 - GU_1)x^2 \tag{8}$$

bulunur. (8) de Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin başlangıç koşulları yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$f(x) = \frac{(3-2i) - 2(1-i)x + 3ix^2}{1 - x - x^3}$$

elde edilir.

Sıradaki teorem Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin Binet formülü ile ilgilidir.

Teorem 2.3. *n. Gauss Narayana-Lucas sayısı*

$$GU_n = \left(1 + \frac{i}{\alpha^2}\right)\alpha^n + \left(1 + \frac{i}{\beta^2}\right)\beta^n + \left(1 + \frac{i}{\gamma^2}\right)\gamma^n$$

ile bulunur. Burada α, β ve γ sayıları, $x^3 - x^2 - 1 = 0$ denkleminin kökleridir.

İspat: İlk olarak rekürans bağıntıya sahip olan Gauss Narayana-Lucas sayı dizisini bir polinom denklemine dönüştürelim. Bu yüzden $GU_n = x^n$ olsun. Buradan,

$$GU_n = GU_{n-1} + GU_{n-3}$$

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-3}$$

$$x^3 = x^2 + 1$$

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \tag{9}$$

elde edilir. (9) eşitliği Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin karakteristik denklemidir. Üçüncü dereceden bu denklemin kökleri, $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ olmak üzere,

$$\alpha = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}} \tag{10}$$

$$\beta = \frac{1}{3} + \omega\sqrt[3]{\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \omega^2\sqrt[3]{\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}} \tag{11}$$

$$\gamma = \frac{1}{3} + \omega^2\sqrt[3]{\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \omega\sqrt[3]{\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}}} \tag{12}$$

şeklindedir. (10), (11) ve (12) eşitlikleri Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin karakteristik kökleridir.

Ayrıca Narayana-Lucas sayı dizisinin Binet formülü

$$U_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \tag{13}$$

dir [14].

(2) ve (13) eşitlikleri birlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned} GU_n &= U_n + iU_{n-2} \\ &= (\alpha^n + \beta^n + \gamma^n) + i(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2} + \gamma^{n-2}) \\ &= \left(\alpha^n + i\frac{\alpha^n}{\alpha^2}\right) + \left(\beta^n + i\frac{\beta^n}{\beta^2}\right) + \left(\gamma^n + i\frac{\gamma^n}{\gamma^2}\right) \\ &= \left(1 + \frac{i}{\alpha^2}\right)\alpha^n + \left(1 + \frac{i}{\beta^2}\right)\beta^n + \left(1 + \frac{i}{\gamma^2}\right)\gamma^n \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de, Gauss Narayana-Lucas sayı dizisine ait bazı toplam formülleri ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 2.4. *Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin ardışık terimlerinin toplamı*

$$\sum_{i=1}^{n} GU_i = GU_{n+3} - (4 + i)$$

dir.

İspat: (1) eşitliği

$$GU_{n-3} = GU_n - GU_{n-1} \tag{14}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi (14) te n yerine sırasıyla $4, 5, 6, \ldots, n+3$ yazılırsa

$$GU_1 = GU_4 - GU_3$$

$$GU_2 = GU_5 - GU_4$$

$$GU_3 = GU_6 - GU_5$$

$$\vdots$$

$$GU_n = GU_{n+3} - GU_{n+2}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^{n} GU_i = GU_{n+3} - GU_3 = GU_{n+3} - (4 + i)$$

bulunur.

Teorem 2.5.

$$\boldsymbol{i}.\ \sum_{i=1}^{n} GU_{3i} = GU_{3n+1} - 1,$$

$$\boldsymbol{ii}.\ \sum_{i=1}^{n} GU_{3i-1} = GU_{3n} - (3 - 2i),$$

$$\boldsymbol{iii}.\ \sum_{i=1}^{n} GU_{3i-2} = GU_{3n-1} - 3i.$$

İspat:

$\boldsymbol{i}$. (1) eşitliği

$$GU_{n-1} = GU_n - GU_{n-3} \tag{15}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi (15) te n yerine sırasıyla $4, 7, 10, \dots, 3n + 1$ yazılırsa

$$GU_3 = GU_4 - GU_1$$

$$GU_6 = GU_7 - GU_4$$

$$GU_9 = GU_{10} - GU_7$$

$$\vdots$$

$$GU_{3n} = GU_{3n+1} - GU_{3n-2}$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^{n} GU_{3i} = GU_{3n+1} - GU_1 = GU_{3n+1} - 1$$

bulunur.

$\boldsymbol{ii}$ ve $\boldsymbol{iii}$ maddelerinin ispatı, $\boldsymbol{i}$ maddesinin ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 2.6. $n + k \geq 5$ *için,* $GU_{n+k+1} = GU_{n+k-1} + 2GU_{n+k-3} + GU_{n+k-5}$ *dir.*

İspat: İspatı k üzerinden tümevarım ile yapacağız. O halde $k = 1$ için,

$$\begin{aligned} GU_{n+2} &= GU_{n+1} + GU_{n-1} \\ &= GU_{n+1} + GU_{n-2} + GU_{n-4} \end{aligned}$$

$$= GU_n + GU_{n-2} + GU_{n-2} + GU_{n-4}$$

$$= GU_n + 2GU_{n-2} + GU_{n-4}$$

olup verilen eşitliğin doğru olduğu görülür. Teoremin $k = t$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$GU_{n+t+1} = GU_{n+t-1} + 2GU_{n+t-3} + GU_{n+t-5}$$

eşitliği doğru olsun. Şimdi ise $k = t + 1$ için teoremin doğru olduğunu gösterelim.

$$GU_{n+t+2} = GU_{n+t+1} + GU_{n+t-1}$$

$$= GU_{n+t-1} + 2GU_{n+t-3} + GU_{n+t-5} + GU_{n+t-1}$$

$$= GU_{n+t-1} + GU_{n+t-3} + GU_{n+t-3} + GU_{n+t-5} + GU_{n+t-1}$$

$$= GU_{n+t} + GU_{n+t-2} + GU_{n+t-2} + GU_{n+t-4}$$

$$= GU_{n+t} + 2GU_{n+t-2} + GU_{n+t-4}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

Sonuç 2.1. Teorem 2.6 da sırasıyla $k = n - 1$ ve $k = n$ yazılırsa,

$$\boldsymbol{i}.\ GU_{2n} = GU_{2n-2} + 2GU_{2n-4} + GU_{2n-6},$$

$$\boldsymbol{ii}.\ GU_{2n+1} = GU_{2n-1} + 2GU_{2n-3} + GU_{2n-5}$$

bulunur.

Sıradaki teoremler, Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin terimlerini matrislerdeki temel işlemler vasıtası ile vermektedir.

Teorem 2.7. $G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $N_3 = \begin{pmatrix} 1+3i & 1 & 3-2i \\ 1 & 3-2i & 3i \\ 3-2i & 3i & -2+2i \end{pmatrix}$ *ve*

$L_3{}^n = \begin{pmatrix} GU_{n+2} & GU_{n+1} & GU_n \\ GU_{n+1} & GU_n & GU_{n-1} \\ GU_n & GU_{n-1} & GU_{n-2} \end{pmatrix}$ *olsun.* $n \in \mathbb{Z}^+$ *için,*

$$G_3{}^n . N_3 = L_3{}^n$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatını n üzerinden tümevarım ile yapacağız. O halde $n = 1$ için,

$$G_3 . N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1+3i & 1 & 3-2i \\ 1 & 3-2i & 3i \\ 3-2i & 3i & -2+2i \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4+i & 1+3i & 1 \\ 1+3i & 1 & 3-2i \\ 1 & 3-2i & 3i \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} GU_3 & GU_2 & GU_1 \\ GU_2 & GU_1 & GU_0 \\ GU_1 & GU_0 & GU_{-1} \end{pmatrix}$$

olup verilen eşitliğin doğru olduğu görülür. Teoremin $n=k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$${G_3}^k.N_3 = {L_3}^k$$

eşitliği doğru olsun. Şimdi ise teoremin $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} {G_3}^{k+1}.N_3 &= G_3.\left({G_3}^k.N_3\right) \\ &= G_3.{L_3}^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} GU_{k+2} & GU_{k+1} & GU_k \\ GU_{k+1} & GU_k & GU_{k-1} \\ GU_k & GU_{k-1} & GU_{k-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} GU_{k+2}+GU_k & GU_{k+1}+GU_{k-1} & GU_k+GU_{k-2} \\ GU_{k+2} & GU_{k+1} & GU_k \\ GU_{k+1} & GU_k & GU_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} GU_{k+3} & GU_{k+2} & GU_{k+1} \\ GU_{k+2} & GU_{k+1} & GU_k \\ GU_{k+1} & GU_k & GU_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= {L_3}^{k+1} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

Teorem 2.8. $n \in \mathbb{Z}^+$ *için,*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n.\begin{pmatrix} 3-2i \\ 1 \\ 1+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} GU_n \\ GU_{n+1} \\ GU_{n+2} \end{pmatrix}$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatını n üzerinden tümevarım ile yapacağız. O halde $n=1$ için,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3-2i \\ 1 \\ 1+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+3i \\ 4+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} GU_1 \\ GU_2 \\ GU_3 \end{pmatrix}$$

olup verilen eşitliğin doğru olduğu görülür. Teoremin $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k . \begin{pmatrix} 3-2i \\ 1 \\ 1+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} GU_k \\ GU_{k+1} \\ GU_{k+2} \end{pmatrix}$$

eşitliği doğru olsun. Şimdi ise teoremin $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} . \begin{pmatrix} 3-2i \\ 1 \\ 1+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k} . \begin{pmatrix} 3-2i \\ 1 \\ 1+3i \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} GU_k \\ GU_{k+1} \\ GU_{k+2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} GU_{k+1} \\ GU_{k+2} \\ GU_k + GU_{k+2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} GU_{k+1} \\ GU_{k+2} \\ GU_{k+3} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. □

Son olarak, Gauss Narayana ile Gauss Narayana-Lucas sayı dizileri arasında kurulan bazı ilişkiler teorem olarak verilecektir.

Teorem 2.9. *Gauss Narayana ile Gauss Narayana-Lucas sayı dizileri arasındaki bazı ilişkiler aşağıda verilmiştir:*

1. $GU_n = 3GN_{n+4} - 5GN_{n+3} + 2GN_{n+2}$,

2. $GU_n = -2GN_{n+3} + 2GN_{n+2} + 3GN_{n+1}$,

3. $GU_n = 3GN_{n+1} - 2GN_n$,

4. $GU_n = GN_n + 3GN_{n-2}$,

5. $31GN_n = -3GU_{n+4} + GU_{n+3} + 11GU_{n+2}$,

6. $31GN_n = -2GU_{n+3} + 11GU_{n+2} - 3GU_{n+1}$,

7. $31GN_n = 9GU_{n+2} - 3GU_{n+1} - 2GU_n$,

8. $31GN_n = 6GU_{n+1} - 2GU_n + 9GU_{n-1}$,

9. $31GN_n = 4GU_n + 9GU_{n-1} + 6GU_{n-2}$.

İspat:

1.
$$GU_n = aGN_{n+4} + bGN_{n+3} + cGN_{n+2} \tag{16}$$

olsun. (16) da n yerine sırasıyla 0, 1 ve 2 yazılırsa,

$$GU_0 = aGN_4 + bGN_3 + cGN_2 \tag{17}$$

$$GU_1 = aGN_5 + bGN_4 + cGN_3 \tag{18}$$

$$GU_2 = aGN_6 + bGN_5 + cGN_4 \tag{19}$$

elde edilir. (17), (18) ve (19) eşitlikleri, Gauss Narayana ve Gauss Narayana-Lucas sayı dizilerinin verilen terimleri ile

$$3 - 2i = a(2+i) + b(1+i) + c \tag{20}$$

$$1 = a(3+i) + b(2+i) + c(1+i) \tag{21}$$

$$1 + 3i = a(4+2i) + b(3+i) + c(2+i) \tag{22}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. (20), (21) ve (22) eşitlikleri beraber çözüldüğü takdirde $a = 3$, $b = -5$ ve $c = 2$ bulunur.

Diğer özdeşliklerin ispatı, **1** özdeşliğinin ispatına benzer şekilde yapılabilir. □

3. SONUÇLAR

Narayana-Lucas sayı dizisi, terimleri tam sayı ve üçüncü mertebeden rekürans bağıntıya sahip bir sayı dizisi olup literatürde mevcuttur. Bu çalışmanın temelini ise Narayana-Lucas sayı dizisinin Gauss formu olan ve kaynak taramasında rastlanılmayan Gauss Narayana-Lucas sayı dizisi oluşturmaktadır. Bu sayı dizisinin ise terimleri karmaşık sayı ve rekürans bağıntısı üçüncü mertebedendir.

İlk olarak Gauss Narayana-Lucas sayı dizisi tanımlanmıştır ve bu sayı dizisinin kombinatoriyal özellikleri incelenmiştir. Bu bağlamda Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu ve genel terimini veren Binet formülü elde edilmiştir. Ardından bu sayı dizisine ait bazı toplam formülleri bulunmuştur. Daha sonra bazı matrisler tanımlanarak, matrislerdeki temel işlemler yardımı ile Gauss Narayana-Lucas sayı dizisinin terimlerine ulaşılmıştır. Son olarak literatürde mevcut olan Gauss Narayana ile bu çalışmanın temelini oluşturan Gauss Narayana-Lucas sayı dizileri arasındaki birtakım ilişkiler, özdeşlikler olarak elde edilmiştir.

Nihai olarak literatürde mevcut olan Narayana-Lucas sayı dizisi dikkate alınarak Gauss Narayana-Lucas sayı dizisi tanımlanıp literatürdeki bu eksiklik giderilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* (John Wiley and Sons Inc., New York, **2001**) pp. 51-131.

[2] V. E. Hoggatt Jr., *Fibonacci and Lucas Numbers* (Houghton Mifflin, Boston, **1969**).

[3] T. Koshy, *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications* (Springer, New York, **2014**).

[4] T. Yağmur, *New Approach to Pell and Pell-Lucas Sequences.* Kyungpook Mathematical Journal 59(1) (**2019**) 23-34.

[5] A. F. Horadam, *Jacobsthal Representation Numbers.* Fibonacci Quarterly 34 (**1996**) 40-54.

[6] A. F. Horadam, *Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions.* American Mathematics Monthly 70 (**1963**) 289-291.

[7] I. J. Good, *Complex Fibonacci and Lucas Numbers, Continued Fractions, and the Square Root of the Golden Ratio.* Fibonacci Quarterly 31(1) (**1993**) 7-20.

[8] J. H. Jordan, *Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers.* Fibonacci Quarterly 3 (**1965**) 315-318.

[9] S. Halıcı, S. Öz, *On Gaussian Pell and Pell-Lucas Numbers.* Ordu University Science and Technology Journal 6(1) (**2016**) 8-18.

[10] T. Yağmur, N. Karaaslan, *Gaussian Modified Pell Sequence and Gaussian Modified Pell Polynomial Sequence.* Aksaray University Journal of Science and Engineering 2(1) (**2018**) 63-72.

[11] M. Aşçı, E. Gürel, *Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal-Lucas Numbers.* Ars Combinatoria 111 (**2013**) 53-63.

[12] A. G. Shannon, P. G. Anderson, A F. Horadam, *Properties of Cordonnier, Perrin and Van der Laan Numbers.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 37(7) (**2006**) 825-831.

[13] D. Taşçı, *Padovan and Pell-Padovan Quaternions.* Journal of Science and Arts 1(42) (**2018**) 125-132.

[14] Y. Soykan, *On Generalized Narayana Numbers.* Int. J. Adv. Appl. Math. And Mech. 7(3) (**2020**) 43-56.

[15] N. J. A. Sloane, *On-line Encyclopedia of Integer Sequences.* http://oeis.org/

[16] D. Taşçı, *Gaussian Padovan and and Gaussian Pell-Padovan Sequences.* Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics 67(2) (**2018**) 82-88.

[17] M. Y. Kartal, *Gaussian Padovan and Gaussian Perrin Numbers and Properties of Them.* Asian-European Journal of Mathematics 12(6) (**2019**) 2040014.

[18] E. Özkan, B. Kuloğlu, *On The New Narayana Polynomials, The Gauss Narayana Numbers and Their Polynomials.* Asian-European Journal of Mathematics 14(6) (**2021**) 2150100.