

Approximate Solution of Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota (DSSH) Equations by Residual Power Series Method (RPSM)

Ahmet Kaya*

Nevşehir Hacı Bektaş Veli University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, Nevşehir, 50300, Turkey

•Received Date: Sep 08, 2021

•Revised Date: Sep 20, 2021

•Accepted Date: Sep 22, 2021

•Published Online: Oct 12, 2021

Abstract

Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota (DSSH) equation approximation solution is acquired by using the residual power series method (RPSM) in this study. The conformable sense is used to characterize the fractional derivatives and the approximate solutions of the RPSM technique are compared to the exact solutions by using various tables and graphs for different fractional operators. The findings demonstrate that the method introduced is simple to use, very successful, consistent; and provides a considerable advance in this area compared to prior approaches.

Keywords

Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota (DSSH) Equation, Residual Power Series Method (RPSM), Conformable, Partial Differential Equation, Approximate Solution.

*Corresponding Author: Ahmet Kaya, ahmetkaya@nevsehir.edu.tr,  [0000-0001-5109-8130](https://orcid.org/0000-0001-5109-8130)

Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota (DSSH) Denklemine Rezidual Kuvvet Seri Metodu (RKSM) Yardımıyla Yaklaşık Çözümü

Ahmet Kaya*

Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Nevşehir, 50300, Türkiye

*Gönderi Tarihi: 08 Eylül 2021

*Düzeltilme Tarihi: 20 Eylül 2021

*Kabul Tarihi: 22 Eylül 2021

*Çevrimiçi Yayın Tarihi: 12 Ekim 2021

Özet

Bu çalışmada, Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota (DSSH) denkleminin yaklaşık çözümü rezidual kuvvet seri metodu (RKSM) kullanılarak elde edildi. Kesirli türevleri karakterize etmek için uyumlu türev yaklaşımı kullanıldı ve farklı operatör değerleri için RKSM yaklaşık çözümleri kesin çözümlerle çeşitli tablo ve grafikler kullanılarak karşılaştırıldı. Sonuçlar; uygulanan tekniğin kullanımının kolay, çok başarılı ve tutarlı olduğunu göstermekle birlikte daha önceki yapılmış çalışmalara kıyasla da önemli bir ilerleme getirdiğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler

Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota (DSSH) Denklemi, Rezidual Kuvvet Seri Metodu (RKSM), Uyumlu Türev, Kısmi Diferansiyel Denklemler, Yaklaşık Çözüm.

1. GİRİŞ

Kesirli analiz konusu ve uygulamaları son yıllarda kayda değer bir önem kazanmıştır ve çeşitli bilimsel alanlarda bilgisayar programlarının kullanımıyla yoğun olarak uygulanmaya başlanmıştır [1]. Kesirli modellerin kullanıldığı bazı alanları şu şekilde sayabiliriz: jeoloji, kimyasal fizik, elektromanyetik teori, sinyal işleme, optik, ekonomi, olasılık ve istatistik [1]. Bu alanlarda karmaşık davranışa sahip olaylar mevcuttur ve bunlar klasik türev modelleri ile karakterize edilemezler [1]. Kesirli diferansiyel denklemler ise klasik diferansiyel denklemlerin

*Sorumlu Yazar: Ahmet Kaya, ahmetkaya@nevsehir.edu.tr,  [0000-0001-5109-8130](https://orcid.org/0000-0001-5109-8130)

genellemesi olup birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve bilim ve mühendislikte çok çeşitli problemleri çözmek için kullanılmıştır [2].

Son yıllarda, kesirli analiz sinyal işleme, elektrik mühendisliği, mekanik ve ekonomi dahil olmak üzere birçok alanda disiplinler arası uygulamalara artan ilgi nedeniyle son derece önemli hale gelmiştir [1, 3].

Bazı karmaşık uygulamalarda tam çözümü bulmak oldukça zordur ve bu durumlarda yaklaşık çözümlerin bulunması genel olarak kolaylık sağlamaktadır. Kesirli diferansiyel denklemleri anlamak ve doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklemlere yaklaşık veya analitik çözümler elde etmek için, Adomian Ayrıştırma Yöntemi (ADM) [4-5], Laplace Analiz Yöntemi (LAM) [6], Homotopi Analiz Yöntemi (HAM) [7-8], Homotopi Pertürbasyon Yöntemi (HPM) [9-10] ve Pertürbasyon Yineleme Algoritması (PIA) [11-12] dahil olmak üzere çeşitli tipik metodolojiler geliştirilmiştir. Kesirli analiz teorisi üzerinde devam eden çalışmalar bu teörinin üzerinde daha yapılması gereken işler olduğunu göstermektedir [13].

Rezidual Kuvvet Seri Metodu (RKSM) ilk olarak Omar Abu Arqub [14] tarafından tasarlanan ve rezidual hata fikrini kullanarak kuvvet serisinin katsayılarını belirleyen bir yöntemdir [14-15]. RKSM'nin temel avantajı, konuya kolayca uygulanabilir olması ve herhangi bir lineerleştirme, pertürbasyon veya ayrıklaştırma gerektirmemesidir [16]. Ayrıca, ilgili rezidual hatayı en aza indirerek seri çözümün yakınsamasını sağlamak için basit bir yol sağlamaktadır [13]. Hesaplama kaynaklı yuvarlama hatasının RKSM üzerinde hiçbir etkisi yoktur ve hesaplama yapılırken büyük miktarda bilgisayar belleği kullanmaz ve zamanınızı almaz [13].

Drinfeld ve Sokolov [17] tarafından ortaya atılan ve daha sonra Satsuma ve Hirota [18] tarafından geliştirilen Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota (DSSH) denklemini şu şekilde tanımlarız [17-18]:

$$T_t^\alpha u - 6uu_x + u_{xxx} - 6v_x = 0 \quad (1)$$

$$T_t^\alpha v - 2v_{xxx} + 6uv_x = 0 \quad (2)$$

Denklemin çözümü için çok sayıda analitik yöntem kullanılmıştır. Bu makalede, DSSH denkleminin yaklaşık bir çözümünü üretmek için RKSM yöntemi uygulanacaktır.

Tanım 1.1 Kuvvet serisinin açılımına [16]

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^{n\alpha} = c_0 + c_1 (t - t_0)^\alpha + c_2 (t - t_0)^{2\alpha} + \dots$$

$0 \leq n - 1 < \alpha \leq n$ durumunda $t = t_0$ daki kesirli kuvvet serisi denir.

$\alpha > 0$ kesirli türevinin Riemann-Liouville ve Caputo [5] kesirli türevleri gibi çeşitli tanımlamaları olmasına rağmen, bu çalışmada Khalil ve arkadaşları [19] tarafından ortaya atılan ve daha uyumlu ve uygulanabilir olan uyumlu (conformable) kesirli türevi ve integrali ele alınmıştır.

Tanım 1.2 $F: [0, \infty) \rightarrow R$ bir fonksiyon olmak üzere, $\forall t > 0$ ve $0 < \alpha < 1$ için α . dereceden uyumlu kesirli türevi [14-15],

$$T_{\alpha}(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - (f)(t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlar. Şimdi, bu tanımın özellikleri aşağıdaki teoremden gösterelim.

Teorem 1.1 f ve g fonksiyonları t noktasında α türevlenebilir olsun. O halde [20];

1. Her $a, b \in R$ için $T_{\alpha}(af + bg) = aT_{\alpha}(f) + bT_{\alpha}(g)$
2. Her r için $T_{\alpha}(t^r) = rt^{r-\alpha}$
3. $T_{\alpha}(f \cdot g) = fT_{\alpha}(g) + gT_{\alpha}(f)$
4. $T_{\alpha}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_{\alpha}(f) - fT_{\alpha}(g)}{g^2}$
5. Bütün sabit $f(t) = c$ fonksiyonları için $T_{\alpha}(c) = 0$
6. Eğer f türevlenebilir bir fonksiyon ise, $T_{\alpha}(f)(t) = t^{1-\alpha} \frac{df(t)}{dt}$.

Tanım 1.3 f, x_1, \dots, x_n değişkenli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun uyumlu kesirli türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır [20-21]:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx_1^{\alpha}} f(x_1, \dots, x_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon x_i^{1-\alpha}, \dots, x_n) - (f)(x_1, \dots, x_n)}{\varepsilon}$$

Tanım 1.4 $m \geq 0$ başlangıç değeri olmak üzere, bir f fonksiyonunun uyumlu integrali [20-21]

$$I_{\alpha}^p(f)(r) = \int_p^r \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} dt$$

şeklinindedir.

2. REZİDUAL KUVVET SERİSİ ALGORİTMASI KAVRAMI

RKSM algoritmasının kavramını göstermek için aşağıdaki gibi doğrusal olmayan bir kesirli diferansiyel denklem dikkate alınmalıdır [21]:

$$T_t^{n\alpha} u(x, t) + R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t) = g(x, t) \quad (3)$$

Burada

$$f_0(x) = u(x, 0) = f(x) \quad (4)$$

başlangıç şartıyla $R[x]$ bir doğrusal ve $N[x]$ ise bir doğrusal olmayan operatördür. RKSM yöntemi ile $t = 0$ noktasında kesirli kuvvet serisinin açılımı için çözüm aşağıdaki gibidir [20-21]:

$$f_{n-1}(x) = T_t^{(n-1)\alpha} u(x, 0) = h(x) \quad (5)$$

Ayrıca bunun açılım formu da

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \quad (6)$$

şeklinindedir.

Bunun yanında, (6) numaralı denklemin k . kesik serisi

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \quad (7)$$

olarak ifade edilir. Buradan kolaylıkla sıfıncı RPS çözümünün $u_0(x, t) = f(x)$ olduğu söylenilebilir. Ayrıca, birinci RPS yaklaşık çözümü de

$$u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \quad (8)$$

olur. Son olarak, k . yaklaşık çözüm ise

$$u_k(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} + \sum_{n=2}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi (3) denkleminin rezidual fonksiyonunu tanımlayacak olursak

$$Res(x, t) = T_t^{n\alpha} u(x, t) + R[x]u(x, t) + N[x]u(x, t) - g(x, t) \quad (10)$$

şeklinindedir. Benzer olarak k . rezidual fonksiyonda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Res_k(x, t) = T_t^{n\alpha} u_k(x, t) + R[x]u_k(x, t) + N[x]u_k(x, t) - g(x, t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Açık bir şekilde söyleyebiliriz ki $t \geq 0$ için $Res(x, t) = 0$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} Res_k(x, t) = Res(x, t)$ olur.

3. REZİDUAL KUVVET SERİ YÖNTEMİ UYGULAMASI

3.1 Örnek Rezidual kuvvet seri yöntemini zaman kesirli DSSH denklemine uygulayalım. Bu denklem

$$T_t^\alpha u - 6uu_x + u_{xxx} - 6v_x = 0 \quad (12)$$

$$T_t^\alpha v - 2v_{xxx} + 6uv_x = 0 \quad (13)$$

şeklinde tanımlanır [17-18]. S. S. Ray ve S. Giri [2] tarafından denklemin başlangıç şartları

$$u(x, 0) = -7c_1^2 + 10c_1^2 \tanh^2(c_1 x) \quad (14)$$

$$v(x, 0) = b_0 + 80c_1^4 \tanh^2(c_1 x) - 40c_1^4 \tanh^4(c_1 x) \quad (15)$$

ve tam çözümleri [2]

$$u(x, t) = -7c_1^2 + 10c_1^2 \tanh^2\left(c_1\left(x + \frac{14c_1^2 t^\alpha}{\alpha}\right)\right) \quad (16)$$

$$v(x, t) = b_0 + 80c_1^4 \tanh^2\left(c_1\left(x + \frac{14c_1^2 t^\alpha}{\alpha}\right)\right) - 40c_1^4 \tanh^4\left(c_1\left(x + \frac{14c_1^2 t^\alpha}{\alpha}\right)\right) \quad (17)$$

şeklinde verilmiştir.

Daha öncede bahsettiğimiz gibi, çözümün kuvvet serisi açılımı

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \quad (18)$$

k. kesik seri açılımı ise

$$u_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \quad (19)$$

şeklinde dir. Rezidual kuvvet seri formülünün k. kesik versiyonunu kullanırsak, DSSH denklemi için k. rezidual fonksiyonlar aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Resu_k(x, t) = T_t^\alpha u_k(x, t) - 6u_k(x, t)(u_k)_x(x, t) + (u_k)_{xxx}(x, t) - 6(v_k)_x(x, t),$$

$$k = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

$$Resv_k(x, t) = T_t^\alpha v_k(x, t) - 2(v_k)_{xxx}(x, t) + 6u_k(x, t)(v_k)_x(x, t), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

$f_1(x)$ ve $g_1(x)$ değerlerini bulmak için (20) ve (21) denklemlerinde $k = 1$ almamız gerekir.

Böylece

$$Resu_1(x, t) = T_t^\alpha u_1(x, t) - 6u_1(x, t)(u_1)_x(x, t) + (u_1)_{xxx}(x, t) - 6(v_1)_x(x, t) \quad (22)$$

$$Resv_1(x, t) = T_t^\alpha v_1(x, t) - 2(v_1)_{xxx}(x, t) + 6u_1(x, t)(v_1)_x(x, t) \quad (23)$$

olur. (8) denklemindeki $u_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n}$ ifadesi (22) denkleminde ve benzer şekilde $v_1(x, t) = g(x) + g_1(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n}$ ifadesi (23) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki rezidual kuvvet serilerine ulaşılmış oluruz:

$$Resu_1(x, t) = f_1(x) - 6 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \right) \left(f'(x) + f_1'(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \right) + \left(f^{(3)}(x) + f_1^{(3)}(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \right) - 6 \left(g'(x) + g_1'(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \right) \quad (24)$$

$$Resv_1(x, t) = g_1(x) - 2 \left(g^{(3)}(x) + g_1^{(3)}(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \right) + 6 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \right) \left(g'(x) + g_1'(x) \frac{t^{n\alpha}}{n!\alpha^n} \right) \quad (25)$$

Burada $t = 0$ değeri yerine yazılırsa

$$Resu_1(x, 0) = f_1(x) - 6f(x)f'(x) + f^{(3)}(x) - 6g'(x) \quad (26)$$

$$Resv_1(x, 0) = g_1(x) - 2g^{(3)}(x) + 6f(x)g'(x) \quad (27)$$

şeklindedir. Daha sonra, $Resu_1(x, 0) = 0$ ve $Resv_1(x, 0) = 0$ almırsa $f_1(x)$ ve $g_1(x)$ değerleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$f_1(x) = c_1^5 280 \operatorname{sech}^2(c_1 x) \tanh(c_1 x) \quad (28)$$

$$g_1(x) = c_1^7 2240 \operatorname{sech}^4(c_1 x) \tanh(c_1 x). \quad (29)$$

Böylece, RKSM yöntemi kullanılarak (1) ve (2) denkleminin yaklaşık çözümü sırasıyla

$$u_1(x, t) = \frac{1}{\alpha} (c_1^2 (\alpha (3 - 10 \operatorname{sech}^2(c_1 x)) + 280 c_1^3 t^\alpha \operatorname{sech}^2(c_1 x) \tanh(c_1 x))) \quad (30)$$

$$v_1(x, t) = \frac{1}{\alpha} (\alpha b_0 + 40 c_1^4 (\alpha - a \operatorname{sech}^4(c_1 x)) + 56 c_1^3 t^\alpha \operatorname{sech}^4(c_1 x) \tanh(c_1 x)) \quad (31)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde $f_2(x)$ ve $g_2(x)$ değerlerine ulaşmak için (20) ve (21) denklemlerinde $k = 2$ almamız gerekir. Böylece

$$Resu_2(x, t) = T_t^\alpha u_1(x, t) - 6u_2(x, t)(u_2)_x(x, t) + (u_2)_{xxx}(x, t) - 6(v_2)_x(x, t) \quad (32)$$

$$Resv_2(x, t) = T_t^\alpha v_2(x, t) - 2(v_2)_{xxx}(x, t) + 6u_2(x, t)(v_2)_x(x, t) \quad (33)$$

olur. (9) denkleminde $u_2(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\alpha} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}$ ifadesi (32) denkleminde ve benzer şekilde $v_2(x, t) = g(x) + g_1(x) \frac{t^\alpha}{\alpha} + g_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2}$ ifadesi (33) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki rezidual kuvvet serilerine ulaşılmış oluruz:

$$Resu_2(x, t) = f_2(x) - 6 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\alpha} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right) \left(f'(x) + f_1'(x) \frac{t^\alpha}{\alpha} + f_2'(x) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right) + \left(f^{(3)}(x) + f_1^{(3)}(x) \frac{t^\alpha}{\alpha} + f_2^{(3)}(x) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right) - 6 \left(g'(x) + g_1'(x) \frac{t^\alpha}{\alpha} + g_2'(x) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right) \quad (34)$$

$$Resv_2(x, t) = g_2(x) - 2 \left(g^{(3)}(x) + g_1^{(3)}(x) \frac{t^\alpha}{\alpha} + g_2^{(3)} \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right) + 6 \left(f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\alpha} + f_2(x) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right) \left(g'(x) + g_1'(x) \frac{t^\alpha}{\alpha} + g_2'(x) \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \right) \quad (35)$$

$t = 0$ değerini yerine yazarsak

$$Resu_2(x, 0) = f_2(x) - 6f(x)f'(x) + f^{(3)}(x) - 6g'(x) \quad (36)$$

$$Resv_2(x, 0) = g_2(x) - 2g^{(3)}(x) + 6f(x)g'(x) \quad (37)$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra, $Resu_2(x, 0) = 0$ ve $Resv_2(x, 0) = 0$ olarak alınırsa $f_2(x)$ ve $g_2(x)$ değerleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$f_2(x) = -3920c_1^8(-2 + \cosh(2c_1x))\operatorname{sech}^4(c_1x) \quad (38)$$

$$g_2(x) = -31360c_1^{10}(-3 + 2\cosh(2c_1x))\operatorname{sech}^6(c_1x) \quad (39)$$

Sonuç olarak ikinci RKSM yaklaşık çözümlerini

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\alpha^2} c_1^2 \operatorname{sech}^2(c_1x) (\alpha^2(-17 + 3 \cosh(2c_1x) + 560t^\alpha c_1^3(-7t^\alpha c_1^3(-2 + \cosh(2c_1x))\operatorname{sech}^2(c_1x) + \alpha \tanh(2c_1x)))) \quad (40)$$

$$v_2(x, t) = \frac{1}{\alpha^2} (\alpha^2 b_0 + 40c_1^4(-\alpha^2(-1 + \operatorname{sech}^4(c_1x)) + 56t^\alpha c_1^3 \operatorname{sech}^4(c_1x)(-7t^\alpha c_1^3(-3 + 2\cosh(2c_1x))\operatorname{sech}^2(c_1x) + \alpha \tanh(c_1x)))) \quad (41)$$

Aynı prosedürü uygulamaya devam edersek, $n = 3$ ve $n = 4$ için benzer sonuçları bulabiliriz.

$n = 3$ için

$$f_3(x) = 54880c_1^{11} \operatorname{sech}^5(c_1x)(-11\sinh(c_1x) + \sinh(3c_1x)) \quad (42)$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{3\alpha^3} c_1^2 (3\alpha^3(3 - 10\operatorname{sech}^2(c_1x)) + 280t^\alpha c_1^3 \operatorname{sech}^2(c_1x)(-21t^\alpha c_1^3 \alpha(-2 + \cosh(2c_1x))\operatorname{sech}^2(c_1x) + 3\alpha^2 \tanh(c_1x) + 196t^{2\alpha} c_1^6(-5 + \cosh(2c_1x))\operatorname{sech}^2(c_1x) \tanh(c_1x)))) \quad (43)$$

ve

$$g_3(x) = 878080c_1^{13} \operatorname{sech}^7(c_1x)(-13\sinh(c_1x) + 2\sinh(3c_1x)) \quad (44)$$

$$v_3(x, t) = \frac{1}{3\alpha^3} (3\alpha^3 b_0 + 40c_1^4(-3\alpha^3(-1 + \operatorname{sech}^4(c_1x)) + 56t^\alpha c_1^3 \operatorname{sech}^4(c_1x)(-21t^\alpha c_1^3 \alpha(-3 + 2 \cosh(2c_1x))\operatorname{sech}^2(c_1x) + 3\alpha^2 \tanh(c_1x) + 196t^{2\alpha} c_1^6(-11 + 4 \cosh(2c_1x))\operatorname{sech}^2(c_1x) \tanh(c_1x)))) \quad (45)$$

ile $n = 4$ için

$$f_4(x) = -768320c_1^{14}(33 - 26 \cosh(2c_1x) + \cosh(4c_1x))\operatorname{sech}^6(c_1x) \quad (46)$$

$$u_4(x, t) = \frac{1}{6\alpha^4} c_1^2 \operatorname{sech}^2(c_1x) (3\alpha^4(-17 + 3 \cosh(2c_1x)) + 560t^\alpha c_1^3 (-21t^\alpha c_1^3 \alpha^2 (-2 + \cosh(2c_1x)) \operatorname{sech}^2(c_1x) + 98t^{2\alpha} c_1^6 \alpha \operatorname{sech}^3(c_1x) (-11 \sinh(c_1x) + \sinh(3c_1x)) - 343t^{3\alpha} c_1^9 (33 - 26 \cosh(2c_1x) + \cosh(4c_1x)) \operatorname{sech}^4(c_1x) + 3\alpha^3 \tanh(c_1x))) \quad (47)$$

ve

$$g_4(x) = -12293120c_1^{16}(52 - 49 \cosh(2c_1x) + 4 \cosh(4c_1x))\operatorname{sech}^8(c_1x) \quad (48)$$

$$v_4(x, t) = \frac{1}{3\alpha^4} (3\alpha^4 b_0 + 40c_1^4 (-3\alpha^4 (-1 + \operatorname{sech}^4(c_1x)) + 56t^\alpha c_1^3 \operatorname{sech}^4(c_1x) (-21t^\alpha c_1^3 \alpha^2 (-3 + 2 \cosh(2c_1x))) \operatorname{sech}^2(c_1x) - 686t^{3\alpha} c_1^9 (52 - 49 \cosh(2c_1x) + 4 \cosh(4c_1x)) \operatorname{sech}^4(c_1x) + 3\alpha^3 \tanh(c_1x) + 196t^{2\alpha} c_1^6 \alpha (-11 + 4 \cosh(2c_1x)) \operatorname{sech}^2(c_1x) \tanh(c_1x))) \quad (49)$$

şeklinde çözümler elde edilirler.

4. NÜMERİK SONUÇLAR

Çalışmanın bu bölümünde, DSSH denklemlerine RKSM ile türetilen yaklaşık analitik çözümler verilecek ve bu analitik çözümler ile tam çözümler karşılaştırılacaktır. Bu çözümleri bulmak için MATHEMATICA bilgisayar programı ile kodlamalar yapılmıştır.

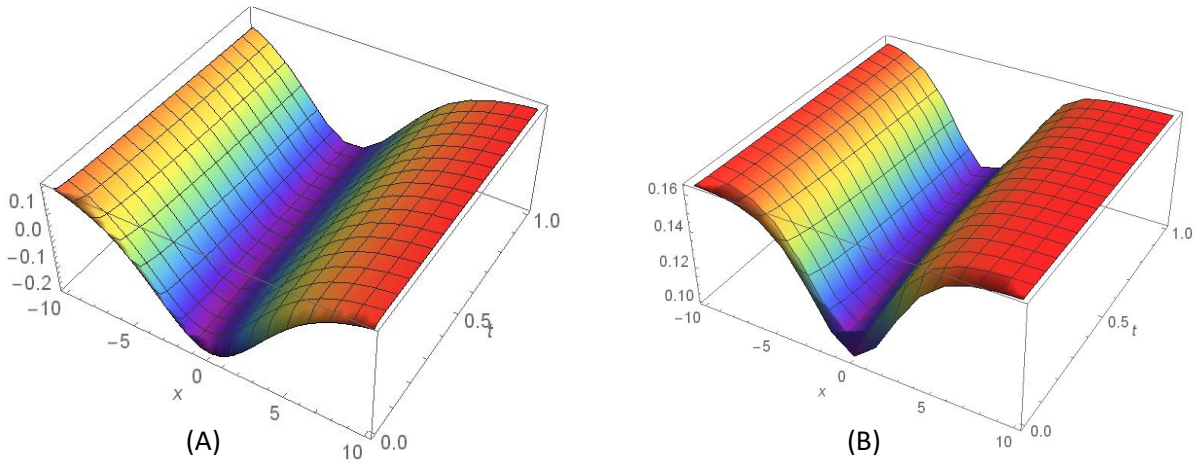
Tablo 1 ve 2’de, RKSM yöntemiyle α ’nın farklı değerleri için bulunun ve 4. dereceden yaklaşık çözümler olan $u_4(x, t)$ ve $v_4(x, t)$ değerleri verilmiştir. Ayrıca $\alpha = 1$ durumunda bulunan yaklaşık çözümler tam çözüm ile karşılaştırılarak mutlak hata bulunmuş ve aralarında güzel bir tutarlılık olduğu gözlenmiştir.

Tablo 1. Farklı α değerleri ($\alpha = 0.25, \alpha = 0.50, \alpha = 0.75$) ve $b_0 = 0.1, c_1 = 0.2, t = 0.1$ için $u_4(x, t)$ yaklaşık çözümleri ile $\alpha = 1$ durumundaki $u_4(x, t)$ yaklaşık çözümünün tam çözümlerle karşılaştırılması ve böylece bulunan mutlak hata

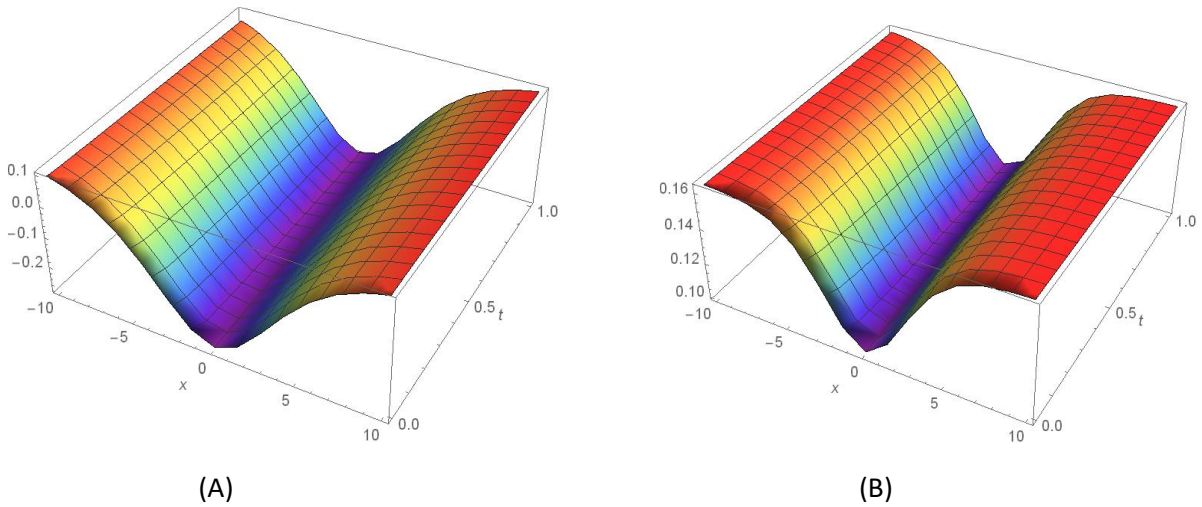
| x | $\alpha = 0.25$ | $\alpha = 0.50$ | $\alpha = 0.75$ | $\alpha = 1.00$ | | |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|--------------|
| | $u_4(x, t)$ | $u_4(x, t)$ | $u_4(x, t)$ | $u_4(x, t)$ | Tam Çözüm | Mutlak Hata |
| 0 | -2.55687E-1 | -2.78000E-1 | -2.79718E-1 | -2.79950E-1 | -2.79950E-1 | -2.98206E-13 |
| 0.1 | -2.51876E-1 | -2.76718E-1 | -2.79134E-1 | -2.79611E-1 | -2.79611E-1 | -3.48571E-12 |
| 0.2 | -2.47830E-1 | -2.75126E-1 | -2.78233E-1 | -2.78953E-1 | -2.78953E-1 | -6.63264E-12 |
| 0.3 | -2.43560E-1 | -2.73230E-1 | -2.77018E-1 | -2.77979E-1 | -2.77979E-1 | -9.70268E-12 |
| 0.4 | -2.39078E-1 | -2.71036E-1 | -2.75493E-1 | -2.76691E-1 | -2.76691E-1 | -1.26606E-11 |
| 0.5 | -2.34396E-1 | -2.68550E-1 | -2.73661E-1 | -2.75094E-1 | -2.75094E-1 | -1.54737E-11 |
| 0.6 | -2.29526E-1 | -2.65780E-1 | -2.71530E-1 | -2.73193E-1 | -2.73193E-1 | -1.81111E-11 |
| 0.7 | -2.24482E-1 | -2.62734E-1 | -2.69106E-1 | -2.70993E-1 | -2.70993E-1 | -2.05457E-11 |
| 0.8 | -2.19276E-1 | -2.59421E-1 | -2.66396E-1 | -2.68502E-1 | -2.68502E-1 | -2.27530E-11 |
| 0.9 | -2.13920E-1 | -2.55852E-1 | -2.63408E-1 | -2.65726E-1 | -2.65726E-1 | -2.47131E-11 |
| 1 | -2.08429E-1 | -2.52037E-1 | -2.60152E-1 | -2.62675E-1 | -2.62675E-1 | -2.64096E-11 |

Tablo 2. Farklı α değerleri ($\alpha = 0.25, \alpha = 0.50, \alpha = 0.75$) ve $b_0 = 0.1, c_1 = 0.2, t = 0.1$ için $v_4(x, t)$ yaklaşık çözümleri ile $\alpha = 1$ durumundaki $v_4(x, t)$ yaklaşık çözümünün tam çözümlerle karşılaştırılması ve böylece bulunan mutlak hata

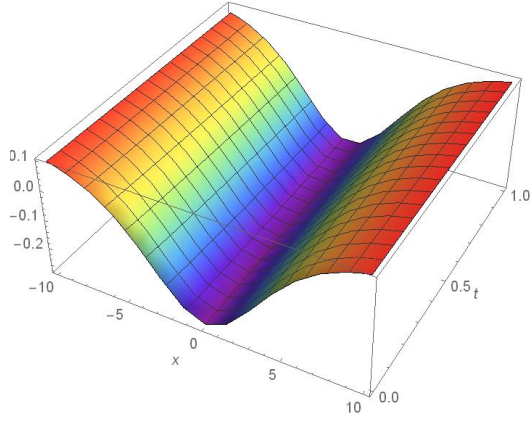
| | $\alpha = 0.25$ | $\alpha = 0.50$ | $\alpha = 0.75$ | $\alpha = 1.00$ | | |
|-----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------|--------------|
| x | $v_4(x, t)$ | $v_4(x, t)$ | $v_4(x, t)$ | $v_4(x, t)$ | Tam Çözüm | Mutlak Hata |
| 0 | 1.07522E-1 | 1.00638E-1 | 1.00090E-1 | 1.00016E-1 | 1.00016E-1 | -2.63845E-13 |
| 0.1 | 1.08652E-1 | 1.01046E-1 | 1.00277E-1 | 1.00124E-1 | 1.00124E-1 | -3.08048E-12 |
| 0.2 | 1.09840E-1 | 1.01550E-1 | 1.00564E-1 | 1.00335E-1 | 1.00335E-1 | -5.84462E-12 |
| 0.3 | 1.11080E-1 | 1.02148E-1 | 1.00951E-1 | 1.00645E-1 | 1.00645E-1 | -8.50969E-12 |
| 0.4 | 1.12368E-1 | 1.02836E-1 | 1.01434E-1 | 1.01054E-1 | 1.01054E-1 | -1.10313E-11 |
| 0.5 | 1.13697E-1 | 1.03612E-1 | 1.02012E-1 | 1.01560E-1 | 1.01560E-1 | -1.33689E-11 |
| 0.6 | 1.15062E-1 | 1.04470E-1 | 1.02682E-1 | 1.02160E-1 | 1.02160E-1 | -1.54859E-11 |
| 0.7 | 1.16458E-1 | 1.05406E-1 | 1.03439E-1 | 1.02850E-1 | 1.02850E-1 | -1.73513E-11 |
| 0.8 | 1.17878E-1 | 1.06416E-1 | 1.04279E-1 | 1.03627E-1 | 1.03627E-1 | -1.89398E-11 |
| 0.9 | 1.19318E-1 | 1.07494E-1 | 1.05199E-1 | 1.04486E-1 | 1.04486E-1 | -2.02323E-11 |
| 1.0 | 1.20771E-1 | 1.08635E-1 | 1.06194E-1 | 1.05424E-1 | 1.05424E-1 | -2.12164E-11 |



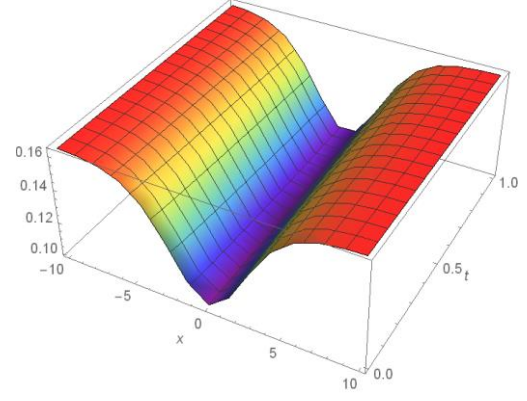
Şekil 1. $\alpha = 0.25$ iken $b_0 = 0.1, c_1 = 0.2, t = 0.1$ değerleri için (A) $u_4(x, t)$ için elde edilen yüzey grafiği, (B) $v_4(x, t)$ için elde edilen yüzey grafiği



Şekil 2. $\alpha = 0.50$ iken $b_0 = 0.1, c_1 = 0.2, t = 0.1$ değerleri için (A) $u_4(x, t)$ için elde edilen yüzey grafiği, (B) $v_4(x, t)$ için elde edilen yüzey grafiği

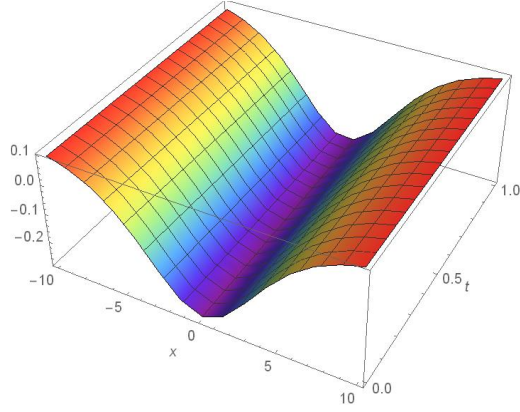


(A)

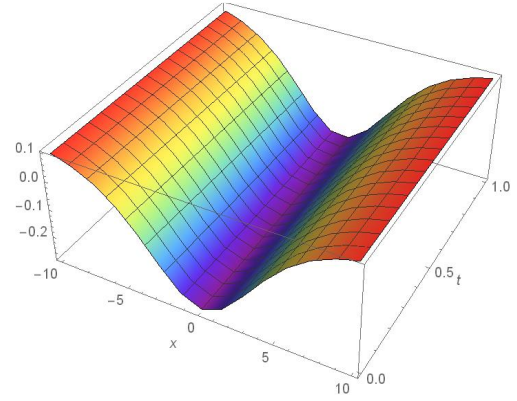


(B)

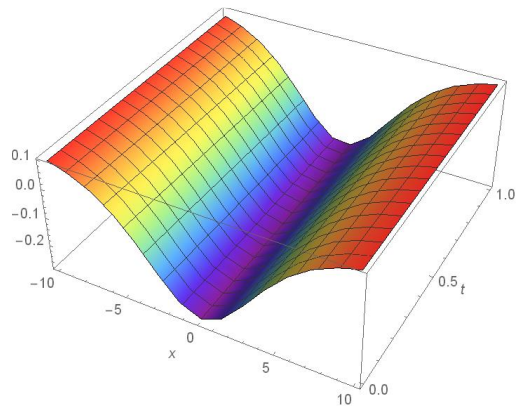
Şekil 3. $\alpha = 0.75$ iken $b_0 = 0.1$, $c_1 = 0.2$, $t = 0.1$ değerleri için (A) $u_4(x, t)$ için elde edilen yüzey grafiği, (B) $v_4(x, t)$ için elde edilen yüzey grafiği



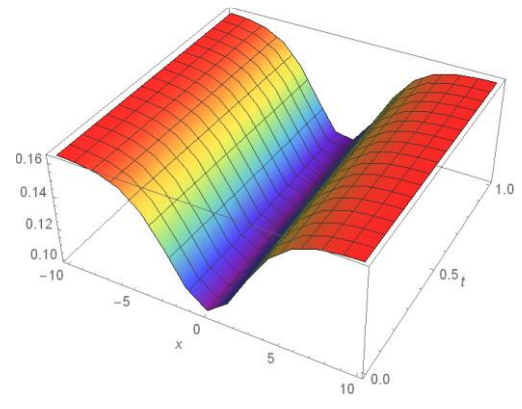
(A)



(B)

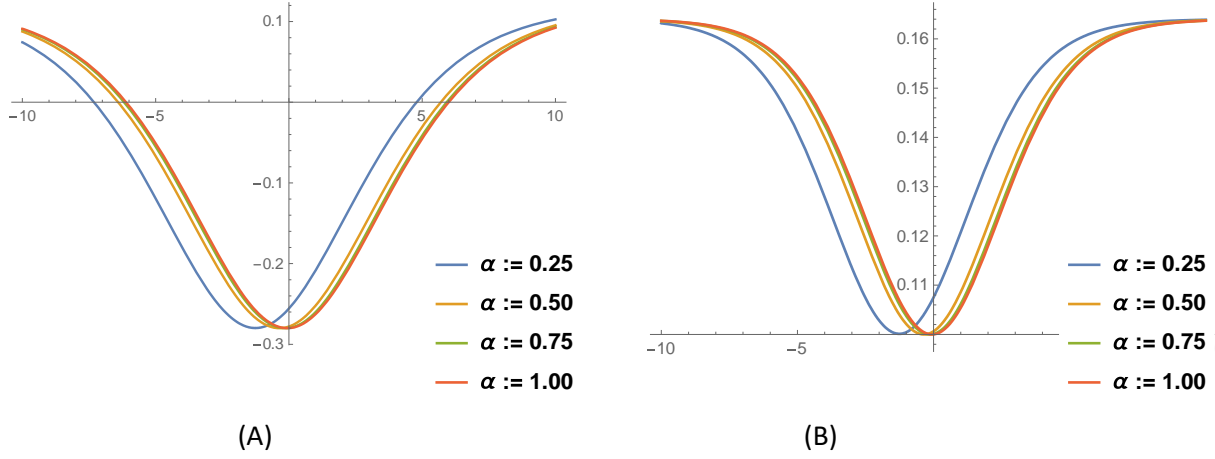


(C)



(D)

Şekil 4. $\alpha = 1$ iken $b_0 = 0.1$, $c_1 = 0.2$, $t = 0.1$ değerleri için (A) $u_4(x, t)$ için elde edilen yüzey grafiği, (B) $v_4(x, t)$ için elde edilen yüzey grafiği, (C) $u(x, t)$ tam çözümü ile elde edilen yüzey grafiği, (D) $v(x, t)$ tam çözümü ile elde edilen yüzey grafiği



Şekil 5. Farklı α değerleri için, $b_0 = 0.1$, $c_1 = 0.2$, $t = 0.1$ durumunda (A) $u_4(x, t)$ çözümünün iki boyutlu gösterimi, (B) $v_4(x, t)$ çözümünün iki boyutlu gösterimi

Şekil 1, 2 ve 3'te $b_0 = 0.1$, $c_1 = 0.2$, $t = 0.1$ değerleri alınarak RKSM yöntemiyle elde edilen 4. dereceden yaklaşık çözümler farklı α değerleri için çizilmiştir. Şekil 4'te ise yine $b_0 = 0.1$, $c_1 = 0.2$, $t = 0.1$ değerleri alınarak $\alpha = 1$ için bulunan $u_4(x, t)$ ve $v_4(x, t)$ yaklaşık çözümleri ile tam çözümlerin grafikleri verilmiştir. $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.50$ ve $\alpha = 0.75$ değerleri kullanılarak elde edilen sonuçlar, çözümlerin davranışlarını göstermek amacıyla tablolara ve şekillere eklenmiştir. Yaklaşık çözümün tutarlılığını göstermek amacıyla da $\alpha = 1$ değerindeki mutlak hata bulunmuştur. Buradaki grafikler RKSM yöntemiyle elde edilen yaklaşık çözümlerin tam çözümler ile tutarlı olduğunu göstermektedir.

Şekil 5'te ise klasik diferansiyel denklemlerin genellemesi olan kesirli diferansiyel denklemin farklı α değerleri için elde ettiğimiz sonuçların karşılaştırmasını yapılmıştır. Ayrıca, yaptığımız iterasyon sayısının artmasıyla bulduğumuz değerlerin birbirine yaklaşması mutlak hatanın küçüldüğünü göstermektedir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, zaman-kesirli Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota (DSSH) denklemlerini çözmek için rezidual kuvvet seri metodu (RKSM) uygulanmıştır. Şekiller ve tablolarla, analitik çözümleri kesin çözüm ile karşılaştırdığımızda RKSM ve DSSH bulguları arasında önemli derecede bir tutarlılık olduğu görülmektedir. Bu nedenle, yöntemimizin önceki yaklaşımlara kıyasla bu alanda önemli bir ilerleme sağladığını söyleyebiliriz. Daha önce de söylediğimiz gibi, RKSM yöntemi lineerleştirme, pertürbasyon veya ayrıklaştırma olmaksızın basit uygulanması sayesinde daha avantajlı ve güçlüdür.

KAYNAKLAR

- [1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* (The Netherlands: Elsevier, Amsterdam, 2006).
- [2] S. S. Ray, S. Giri, *New soliton solutions of the time fractional Drinfeld–Sokolov–Satsuma–Hirota system in dispersive water waves*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Early View (2021) <https://doi.org/10.1002/mma.7691>.
- [3] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations* (NY: Academic Press, New York, 1999).
- [4] S.S. Ray, and R.K. Bera, *An approximate solution of a nonlinear fractional differential equation by Adomian decomposition method*, *Applied Mathematics and Computation*, 167(1) (2005) 561-571.
- [5] S. Momani, Z. Odibat, *Numerical approach to differential equations of fractional order*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1) (2007) 96-110.
- [6] L. Kexue, and P. Jigen, *Laplace transform and fractional differential equations*, *Applied Mathematics Letters*, 24(12) (2011) 2019-2023.
- [7] M. Zurigat, S. Momani, Z. Odibat, and A. Alawneh, *The homotopy analysis method for handling systems of fractional differential equations*, *Applied Mathematical Modelling*, 34(1) (2010) 24-35.
- [8] XB. Yin, S. Kumar, D. Kumar, *Modified homotopy analysis method for solution of fractional wave equations*, *Advances in Mechanical Engineering*, 7(12) (2015) 1-8.
- [9] A. Yildirim, *An algorithm for solving the fractional nonlinear Schrödinger equation by means of the homotopy perturbation method*, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(4) (2009) 445-450.
- [10] Z. Odibat, S. Momani, *Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order*, *Chaos Solitons Fractals*, 36(1) (2008) 167-174.
- [11] M. Senol, O. Tasbozan, A. Kurt, *Comparison of two reliable methods to solve fractional Rosenau-Hyman equation*, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(10) (2021) 7904-7914.
- [12] M. Şenol, and I.T. Dolapci, *On the Perturbation–Iteration Algorithm for fractional differential equations*, *Journal of King Saud University-Science*, 28(1) (2016) 69-74.
- [13] A. Arafa, G. Elmahdy, *Application of residual power series method to fractional coupled physical equations arising in fluids flow*, *International Journal of Differential Equations*, 2018 (2018) 1- 10.
- [14] O. A. Arqub, *Series solution of fuzzy differential equations under strongly generalized differentiability*, *Journal of Advance Research in Applied Mathematics*, 5 (2013) 31-52.
- [15] H. M. Jaradat, I. Jaradat, M. Alquran, et al, *Approximate solutions to the generalized time-fractional Ito system*, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 37 (2017) 699-710.
- [16] H.M. Jaradat, S. Al-Shara, Q. J. Khan, M. Alquran, and K. Al-Khaled, *Analytical solution of time-fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson system using residual power series method*, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 46(1) (2016) 64-70.
- [17] V. G. Drinfeld, V. Sokolov, *Equations of Korteweg–de Vries type and simple Lie algebras*, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 258(1) (1981) 11–16.

- [18] J. Satsuma, R. Hirota, *A coupled KdV equation is one case of the four-reduction of the KP hierarchy*, Journal of the Physical Society of Japan, 51(10) (1982) 3390–3397.
- [19] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, Journal of Computational Applied Mathematics, 264 (2014) 65-70.
- [20] M. Senol, *Analytical and approximate solutions of (2+1)-dimensional time-fractional Burgers-Kadomtsev-Petviashvili equation*, Communications in Theoretical Physics, 72(5) (2020) 1-11.
- [21] A. Kurt, H. Rezazadeh, M. Senol, A. Neirameh, O. Tasbozan, M.E.M. Mirzazadeh, *Two effective approaches for solving fractional generalized Hirota-Satsuma coupled KdV system arising in interaction of long waves*, Journal of Ocean Engineering and Science, 4(1) (2019) 24-32.